Affine und projektive Geometrie am Computerbildschirm

S. K. Grosser, Universität Wien

Inhalt

Einleitung

In dieser komprimierten Kurzdarstellung wird ein facettenreiches, mathematikorientiertes Geometrie-Programm beschrieben, dessen theoretische Grundlage meine Arbeiten [1] und [2] bilden, die in Zusammenarbeit mit Univ.-Doz. Mag. Dr. W. Herfort von der TU Wien erstellt wurden. Die langwierige und zum Teil sehr anspruchsvolle Programmierarbeit wurde von Mag. G. Hippmann geleistet. Das in TURBO–PASCAL 6.0 geschriebene Paket beruht auf einer Mathematikoberfläche, die in Zusammenarbeit mit der Firma Siemens von Mitgliedern meiner Arbeitsgruppe für WINDOWS entwickelt wurde: hauptsächlich von Mag. J. Grassberger, daneben R. Rößler und Dr. G. Landsmann.

Ziel dieser Arbeit war es, ein Computerprogramm zu schaffen, das die traditionelle Zeichenebene der Geometrie mit vielen wichtigen Konstruktionsmöglichkeiten auf den Bildschirm transferiert, diese Ebene zugleich zu einer leicht begreiflichen aber exakten Modelldarstellung der projektiven Ebene erweitert und die für alle Konstruktionen eingegebenen bzw. errechneten Daten abrufbar bereithält.

So enthält z.B. die Abbildung neben vielen anderen Figuren die Figur eines Dreiecks mit folgenden selektiv ausgewählten Daten:

Eingabe: $A\ (-2 \mid -2)$, $B\ (3 \mid 1)$, $C\ (-1 \mid 3)$
Ausgabe: $U\ (0.09 \mid 0.18)$, $r_u = 3.02$, $H\ (-0.18 \mid 1.63)$

(Also: Umkreismittelpunkt, Umkreisradius, Höhenschnittpunkt)

Wie das Beispiel andeutet, können **alle** metrischen Bestimmungsstücke, die traditionellerweise bei der Berechnung elementarer Figuren gefragt sind, abgerufen werden. Insofern als die affine Ebene $\mathbb{R}^2$ in die projektive Ebene $P^2(\mathbb{R})$ eingebettet ist, können im projektiven Bild die gleichen Bestimmungsstücke — allerdings wahlweise numerisch „verfremdet" — erhalten werden. Die Eingabe im zitierten Beispiel könnte aber auch, im Sinne der Kongruenzgeometrie, in der Form „a, b, γ" oder „α, c, β" erfolgen, worauf das Bild in einer Standardposition im Koordinatensystem erscheint; also ist die standardisierte Trigonometrie der Dreiecke im Programm eingebaut. Die Problemlöse- bzw. Darstellungskapazität des Programms reicht allerdings — wie unten angedeutet — darüber hinaus; neben der händisch so zeitraubenden Hauptachsentransformation kann z.B. der anspruchsvolle Satz von Pascal realisiert werden, wonach durch 5 verschiedene Punkte (darunter Fernpunkte) der projektiven Ebene ein eindeutig bestimmter (verallgemeinerter) Kegelschnitt gelegt werden kann.

§ 1 Ein explizites, geometrisch-topologisch-algebraisches Modell von $P^2(\mathbb{R})$

Das der Ausbildung von Studierenden zugrundeliegende Modell der projektiven Ebene stammt aus der linearen Algebra und sieht $P^2(\mathbb{R})$ als eine Menge an, deren „Punkte" in Wirklichkeit Geraden und deren „Geraden" Ebenen durch $(0 \mid 0 \mid 0)$ im $\mathbb{R}^3$ sind. Daß die „Ferngerade" dieses Modells also auch eine solche Ebene sein soll, blockiert für den, der sich in die Welt der „unendlich fernen" Punkte hineindenken will, jedes intuitive Verständnis und hat dazu geführt, daß die projektive Geometrie — auch für fast alle Mathematiker — zu einem völlig unanschaulichen Teilgebiet der linearen Algebra geworden ist. Wer „versteht" an diesem Modell „wirklich", daß der Satz von Desargues, um ein Beispiel zu nennen, auch bei Parallelprojektion gilt, oder daß die Asymptoten einer Hyperbel dieselbe in zwei Fernpunkten scheiden und die beiden Äste über die Fernpunkte zusammenhängen? Am allerwenigsten kann an diesem Modell eine Theorie der Kurven betrieben werden, wie sie in der affinen Ebene im Rahmen der Analysis in (sehr bescheidener) Form geboten wird.

Nun gibt es zwar — z.B. in der Topologie — ein Punktmodell des $P^2(\mathbb{R})$: □ Es ist aber durch keine in „vernünftiger" Weise darstellbare Konstruktion aus dem anfangs erwähnten „Geradenmodell" herzuleiten und entbehrt somit der Darstellungsfähigkeit in bezug auf höhere Objekte, die ja erst eine Geometrie ausmachen: Sehnen, Geraden, Parallele, Dreiecke, Polygone, Kegelschnitte, allgemeine Kurven etc.

Das hier verwendete explizite Modell wurde deshalb mit der Zielvorstellung entwickelt, ein in bezug auf alle Objekte darstellungsfähiges und algebraisch-analytisch beherrschbares Instrument zu erzeugen. Die unten gebotenen Illustrationen belegen, daß dieses Ziel erreicht worden ist.

Dem Leser bzw. Programmbenutzer sei empfohlen, sich die Modellbildung folgendermaßen vorzustellen. An die Ebene $\mathbb{R}^2$ werde „weit draußen" eine Kreislinie angeklebt — die Ferngerade — und die ganze Figur auf die Größe eines Einheitskreises mit Randkreis zusammengezogen. Jede Gerade des $\mathbb{R}^2$ wird bei diesem Prozeß zu einem Kurvenstück, einem Bogenstück eines Kreises, der den Einheitskreis in gegenüberliegenden Punkten, einem Antipodenpaar, schneidet. Jedes solche Antipodenpaar stellt **einen** Fernpunkt dar. Dreiecke oder Polygone bestehen aus Teilen solcher Kreisbögen, parallele Gerade sind solche Kreisbögen, die einander im Antipodenpaar schneiden. Im Modell „sieht" man also, wie ein paralleles Schienenpaar in einem (Fern)-Punkt — demselben für beide Richtungen — zusammenläuft. Natürlich wirkt das projektive Bild leicht verfremdet. Der Benutzer kann aber jederzeit — per Knopfdruck — von projektiven Bild auf das affine (oder umgekehrt) schalten und sich der wahren (d.h. richtigen metrischen) Verhältnisse versichern. Das projektive Bild ist aber umfassender; es bietet einen um die Verhältnisse im unendlich Fernen angereicherte Perspektive der Wirklichkeit, eine Art mathematischer „Fischaugenperspektive". Die durch das Modell suggerierte (und tatsächlich vorhandene) Kompaktheit der projektiven Ebene kommt also der Darstellungskapazität sehr weit entgegen. Deshalb sind fast alle Illustrationen in dieser Form beigefügt.

Der Benutzer, der sich mit den wirklichen mathematischen Grundlagen der Modellbildung vertraut machen möchte, sei nachdrücklich auf [1] und [2] verwiesen. Für eine problemlose Benutzung genügen aber sicher die im Programm selbst gegebenen Anleitungen.

Im folgenden sollen nun die genaueren inhaltlichen Möglichkeiten der Programmanwendung beschrieben werden.

§ 2 Dreiecksgeometrie

Kernstück der klassischen Geometrie und ihrer Lehre ist die Geometrie der Dreiecke. Sie ist im Programm auf der Grundlage der Trigonometrie und der Vektorrechnung im folgenden Sinn verwirklicht. Grundlage sind die Bücher [1] und [7].

(a) **Metrische Bestimmungsstücke und Kongruenzsätze**
Ist ein Dreieck durch die Koordinaten der Eckpunkte A, B, C oder durch Angaben im Sinne von SSS, WSW, SWS oder SsW (2 Fälle) eindeutig gegeben, so werden alle fehlenden Bestimmungsstücke sowie zusätzliche numerische Daten berechnet und das Dreieck wird gezeichnet.

(b) **Merkwürdige Punkte I**
Es werden die Punkte S (**Schwerpunkt**), H (**Höhenschnittpunkt**), U (**Umkreismittelpunkt**) und die zugehörige **Euler'sche Gerade** gezeichnet und berechnet.
Dasselbe gilt für den **Inkreismittelpunkt** und die **Ankreismittelpunkte** I_a, I_b, I_c. Die Verbindungsgeraden der Eckpunkte mit den Berührungspunkten des Inkreises auf den Gegenseiten schneiden sich ebenfalls in einem Punkt, dem **Gergonne'schen Punkt** G.

(c) **Merkwürdige Punkte II**
Auf Wunsch wird der **Feuerbachkreis** oder **9–Punkte–Kreis** gezeichnet, dessen Mittelpunkt F ebenfalls auf der Euler'schen Geraden liegt; er geht durch die Fußpunkte der Höhen, die Mittelpunkte der Seiten und die Halbierungspunkte der Sehnen $\overline{FA}$, $\overline{FB}$, $\overline{FC}$.
In jedem Dreieck existieren mit den Mittelpunkten A, B, C 3 einander berührende

Kreise, für die ein gemeinsamer innerer Berührungskreis (**innerer Soddy–Kreis**) mit Mittelpunkt SO_i (**innerer Soddy–Punkt**) und ein gemeinsamer äußerer Berührungskreis (**äußerer Soddy–Kreis**) mit Mittelpunkt SO_a (**äußerer Soddy–Punkt**) existiert. Beide Kreise werden gezeichnet.[1]
In jedem Dreieck existiert ein Punkt F_e, für den die Summe der Distanzen zu den drei Eckpunkten A, B, C minimal ist. Dieser **Fermat–Punkt** F_c ist die Lösung eines historisch interessanten und schwierigen Problems. Von F_c aus erscheinen alle drei Seiten AB, BC, CA unter dem gleichen Winkel von 120°. Er wird im Programm auf Wunsch berechnet und gezeichnet.[2]

(d) **Polygone** werden ebenfalls zeichnerisch und numerisch behandelt.

Für jede Konstruktion können notwendige Konstruktionslinien oder Punkte eingezeichnet, weggelassen, angefügt oder gelöscht werden.

§ 3 Kegelschnitte

Ein integraler Bestandteil des Geometrieunterrichts sind die (verallgemeinerten) Kegelschnitte.
Das Programmpaket analysiert (auf der Grundlage von [5]) die eingegebene **quadratische Gleichung**

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + cy + f = 0 \ ,$$

bestimmt die Art des Kegelschnitts (einschließlich aller degenerierten Fälle) und zeichnet sie zusammen mit allen eventuell gewünschten Bestimmungsstücken, wie **Mittelpunkt, Achsen, Brennpunkten, Asymptoten.** Ferner wird auf Wunsch eine **Hauptachsentransformation** durchgeführt, die den Kegelschnitt in Hauptlage darstellt.

§ 4 Affine und projektive Kurven

Jede Kurve kann in **Parameterform** $\{x = f(t), y = g(t)\}$, speziell in der üblichen Form $\{y = f(x)\}$ oder in **Polarkoordinatendarstellung** $\{r = f(\varphi)\}$ eingegeben werden. Natürlich müssen die entsprechenden Parameterintervalle bzw. die Zeichenintervalle ebenfalls eingegeben werden. Treten Fernpunkte auf, so kann der Benutzer aus dem Bild ihre genaue Lage am Einheitskreis ablesen bzw. abschätzen und das noch fehlende Verbindungsstück zeichnen lassen.
Eine Eingabe von Kurvengleichungen in **impliziter Form** ist ebenfalls möglich und erweitert das Repertoire um ein Vielfaches. Alle hier präsentierten Beispiele sind aus meinem Buch mit H. Rupprecht [5] entnommen. Interessante algebraische Kurven niedrigen Grades findet der Interessierte in H. Laub [8] beschrieben.

---

[1] Die Lösung dieses interessanten Problems ist erst im späteren 19. Jahrhundert geglückt (siehe [1]).
[2] Hierzu siehe [2]

Die technischen Details der Erstellung von Schaubildern sind weiter unten (im §7) noch etwas näher erläutert.

§ 5 Kongruenz– und Ähnlichkeitsabbildungen

Jedes dargestellte Objekt (Punkt, Strecke, Polygon, Kurve) kann den in der Kongruenzgeometrie zulässigen Transformationen unterworfen werden: **Rotation** (um einen beliebigen Punkt), **Spiegelung** (an einer beliebigen Geraden), **Translation** um einen Vektor. Auch die **Streckung aus einem Punkt** ist eingebaut, sodaß die Geometrie der Ähnlichkeit ebenfalls zur Verfügung steht. Natürlich ist es auch möglich, die jeweiligen Transformationsgleichungen abzurufen.[3]

§ 6 Sätze und Konstruktionen der projektiven Geometrie

Das Programmpaket ermöglicht auf dem Bildschirm die Durchführung fast aller Konstruktionen, die in der Geometrie mit Zirkel und Lineal durchführbar sind. Diese Liste umfaßt folgende Punkte

- Verbindungsstrecke zwischen 2 Punkten (auch endlichen Punkten und Fernpunkten).
- Kreis um einen Mittelpunkt.
- Kegelschnitte in allgemeiner Lage mit allen wichtigen Charakteristiken.
- Kreis durch 3 Punkte.
- Der **Satz von Desargues** über Dreiecke in perpektiver Lage.
- Eine wirkliche Besonderheit ist die Tatsache, daß auch der **Satz von Pascal** eingebaut ist: durch je 5 verschiedene Punkte der projektiven Ebene geht genau ein (verallgemeinerter) Kegelschnitt. Dieser Kegelschnitt wird gezeichnet und seine Gleichung ermittelt. Sie kann dann natürlich einer Hauptachsentransformation unterworfen werden.

Weitere Hinweise auf Konstruktionsmöglichkeiten finden sich in § 7.

[3] In einer späteren Version sollen auch die zugehörigen Gruppenoperationen in der Kongruenzgruppe bzw. der Ähnlichkeitsgruppe darstellbar gemacht werden.

§ 7 Kurzinformation zur Programmgestaltung

G. Hippmann

KURZINFO - Projektiver Zoo

1) Hauptmenü / bearbeiten:

Objektlisten-Handling: Von den maximal 6 möglichen Objektlisten wird im Bearbeitungs-Fenster immer links die aktuelle und rechts eine der gespeicherten angezeigt. Die einzelnen Objekte können mit der Maus selektiert werden und unterteilen sich in 3 Gruppen,nämlich in die Gruppe der allgemeinen Funktionen,die der Kegelschnitte und die der Polygone,welche auch Punkte und Strecken umfaßt.
In der linken Liste können die einzelnen Objekte mit den entsprechenden Buttons gelöscht oder ihre Reihenfolge geändert werden. Mit dem Button 'neu' wird die ganze Liste bis auf die Startobjekte gelöscht.
Um die einzelnen Objekte der aktuellen Liste zu bearbeiten,gibt es 2 Möglichkeiten:
Man selektiert ein Objekt mit einem Maus-Doppelklick,oder,man wählt die gewünschte Objektart aus und drückt nebenstehenden 'OK'-Button.
Für spezielle Konstruktionen,Transformationen in der Ebene oder Schnittpunkte zweier Objekte stehen nach Selektion eines oder mehrerer Objekte 3 entsprechende Buttons zur Verfügung. Transformationen in der Ebene sind nur auf Kegelschnitte und Polygone anwendbar.
Mit den diversen Pfeil-Buttons können einzelne Objekte oder ganze Listen von links nach rechts und umgekehrt getauscht werden,bzw. kann mit den Buttons 'vor' und 'zurück' in den nicht aktuellen Listen geblättert werden.
Die Dateioperationen rechts unten im Dialogfenster beziehen sich auf die rechte Objektliste!

Allgemeine Funktionen: Dieses Dialogfenster ermöglicht es,Funktionen implizit als Gleichung F(x,y)=0 oder explizit in Parameterdarstellung kartesisch (x(t),y(t)) oder polar (Phi(t),r(t)) zu definieren.
Für die implizite Definition gibt man die Gleichung in das oberste Textfeld ein und drückt den oberen 'Ident'-Button. Bei der expliziten Eingabe kann man mehrere Funktionsäste definieren, die dann samt Parameterintervall in der Explizit-Liste aufscheinen. Die Eingabe erfolgt in den Textfeldern darüber,die Übernahme in die Liste erfolgt durch Drücken des 'Ident'-Buttons.
Bereits vorhandene Funktionsäste kann man mit der Maus im 'x(t)'-Teil selektieren und dann neu editieren. Drückt man dann den 'Ident'-Button,so wird der Funktionsast an die alte Stelle zurückgeschrieben. Drückt man hingegen den 'Neu'-Button,so wird er als neuer Ast in die Liste aufgenommen.Mit dem 'Entf'-Button löscht man selektierte Funktionsäste.
Das Parameterintervall kann auch bis Unendlich gehen,indem man '-Fp' oder 'Fp' statt einer Zahl eingibt.Liegt bei einer Intervallgrenze eine Singularität vor,so wird bei der Übernahme des Funktionsastes der Funktionswert an dieser Stelle abgefragt. Dieser kann im Endlichen liegen oder ein Fernpunkt sein,dessen Richtung im 'x'-Feld in Grad angegeben wird.
Achtung: Bei falschen Angaben kann das Programm abstürzen!
Mit der Buttonleiste unterhalb der Liste können mit dem selektierten Funktionsast diverse Konstruktionen ausgeführt werden,den zugehörigen Zeitparameter gibt man vorher im Textfeld 't von' an.
Nach der Definition der Funktion und Bekanntgabe eines Namens,einer Farbe und des Beschriftungsortes übernimmt man das Objekt mit dem 'OK'-Button.

Kegelschnitte: Diese kann man entweder implizit als Gleihung (Format in der Vorgabe ersichtlich) oder in Hauptachsenlage durch Angabe der Kegelschnittart,des Mittelpunkts, der Neigung und dreier Parameter (a,b,r),deren Bedeutung von der Art des Kegelschnitts abhängt, definieren

Ellipse:	x^2/a^2 + y^2/b^2 = r^2	
Hyperbel:	x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1	
Parabel:	a*y^2 + b*x = 0	a>0, b<>0
Zwei Geraden:	a*x^2 + b*y^2 = 0	a*b<0
Paralle Geraden:	a*y^2 + b = 0	a*b<0
Doppelgerade:	a*y^2 = 0	a>0
Punkt:	x^2 + y^2 = 0	
Leer:	x^2 + y^2 = -1	

Drückt man einen der beiden 'Ident'-Buttons, so werden die jeweils anderen Angaben aktualisiert. Achtung: Dabei kann es in Grenzfällen zu Rundungsfehlern kommen!
Nach der Definition des Kegelschnittes und Bekanntgabe eines Namens,einer Farbe und des Beschriftungsortes übernimmt man das Objekt mit dem 'OK'-Button.

Punkte,Strecken und Polygone: Nach Auswahl der Polygonart kann man bei der Eingabe der Eckpunkt-Koordinaten bei Punkten und Strecken auch Fernpunkte angeben. Dies geschieht so, daß in die x-Koordinate die Richtung in Grad eingegeben wird und ins Textfeld der y-Koordinate nur 'Fp' geschrieben wird.

Dreiecke können auch nur durch Angabe diverser Seiten und Winkel definiert werden

Außerdem können die einzelnen Seiten des Polygons vollständig, d.h.als ganze Geraden definiert werden

Nach der Definition des Polygons und Bekanntgabe eines Namens,einer Farbe und des Beschriftungsortes übernimmt man das Objekt mit dem 'OK'-Button.

Schnittpunkte: Um die Schnittpunkte zweier Objekte berechnen zu können, muß eines der Objekte implizit, das andere aber explizit vorliegen. Ausgenommen ist natürlich ein Schnitt mit der Ferngeraden.

Achtung: Berührungspunkte können bei der Berechnung übersehen oder doppelt gerechnet werden.

Kongruenzabbildungen: Durch Angabe der entsprechenden Parameter können Kegelschnitte und Polygone beliebig verschoben, gedreht oder an Geraden oder Punkten gespiegelt werden.

Konstruktionen: Je nach Objektart des selektierten Objekts in der aktuellen Objektliste stehen folgende Konstruktionen zu Verfügung:

Kegelschnitt: Mittelpunkt,Brennpunkte,Asymptoten,Leitgerade,Hauptachsen

Polygon/Dreieck: Eckpunkte,Seiten,Höhen,Schwerlinien,Inkreis,Umkreis,Ankreise, Feuerbachkreis,Eulergerade,Soddykreise

Polygon/sonst: Eckpunkte,Seiten,Diagonalen,Kreis um Punkt A,Parallelen, Streckensymmetrale,Winkelsymmetrale,Peripheriekreise

Sind mehrere Objekte selektiert, so kann man diese auf folgende Weisen 'verbinden':

n Punkte zu einem Polygon,3 Punkte zu einem Kreis,
2 Punkte und ein Mittelpunkt zu einem Kreis,
5 Punkte zu einem Kegelschnitt (auch Fernpunkte!),
2 Polygone gleicher Art an den Eckpunkten verbinden,
2 Polygone verschiedener Art Eckpunkt A mit den Eckpunkten des zweiten Polygons verbinden

Außerdem können hier die Winkelsymmetralen zweier Geraden konstruiert werden.

2) Hauptmenü/Parameter:

In diesem Dialogfenster kann man zwischen der projektiven und der affinen Darstellung umschalten, den Zoom und den Mittelpunkt beider Darstellungen verändern und die Präzision der Parametrisierungen einstellen:

Je größer der projektive Zoom, desto kleiner die Details in der projektiven Darstellung.
Je größer der affine Zoom, desto kleiner der Ausschnitt der affinen Darstellung.
Je kleiner die Präzesionszahl, desto genauer und langsamer die Parametrisierungen.

3) Hauptmenü/Drucker und /Exportieren:

Die erstellten Grafiken können ausgedruckt oder in die Zwischenablage exportiert werden.

§ 8 Beispiele mit Datenmaterial

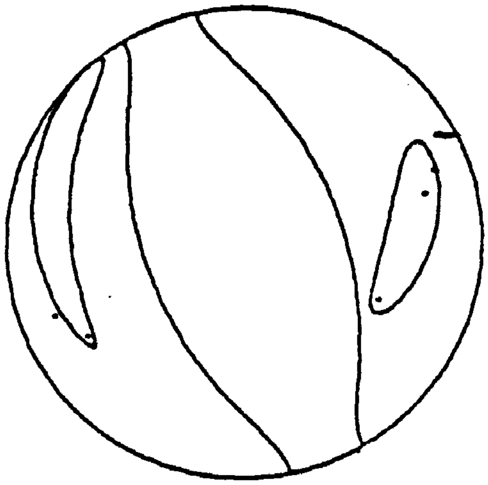
<u>Projektiver Zoo - BIBLIOTHEK</u>

1) Kegels.prj:

Ellipse: $0.478x^2 - 0.875xy + 0.633y^2 - 2.952x + 2.236y + 3.785 = 0$
Mp = (4,1) Phi = 40° r=3, a=1, b=0.333

Hyperbel: $0.880x^2 + 0.661xy + 0.092y^2 - 1 = 0$
Mp = (0,0) Phi = 20° r=1, a=1, b=-6

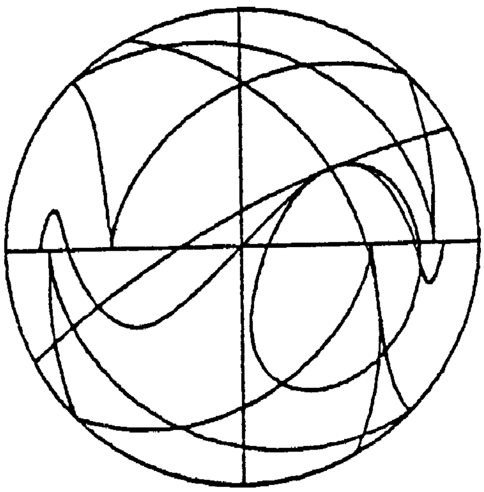
Parabel: $0.587x^2 + 0.985xy + 0.413y^2 + 6.133x + 3.841y + 13.239 = 0$
Mp = (-3,-2) Phi = -50° r=0, a=1, b=1



2) Involute.prj:

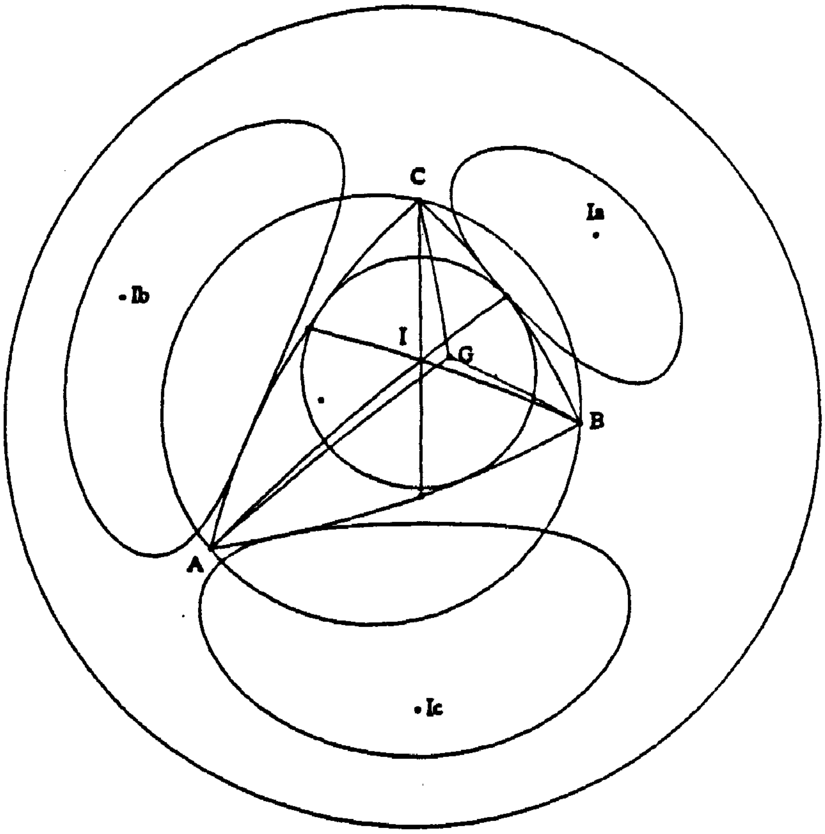
Funktion: t aus [-2pi,-pi] , [-pi,0] , [0,pi] , [pi,2pi]
$x(t) = t$
$y(t) = \sin t$

Involute: $x(t) = t + \cos t\,(1 + \cos^2 t)/\sin t$
$y(t) = \sin t - (1 + \cos^2 t)/\sin t$
Fernpunkte: 315°, 225°, 45°, 135°, 315°, 225°, 45°, 135°

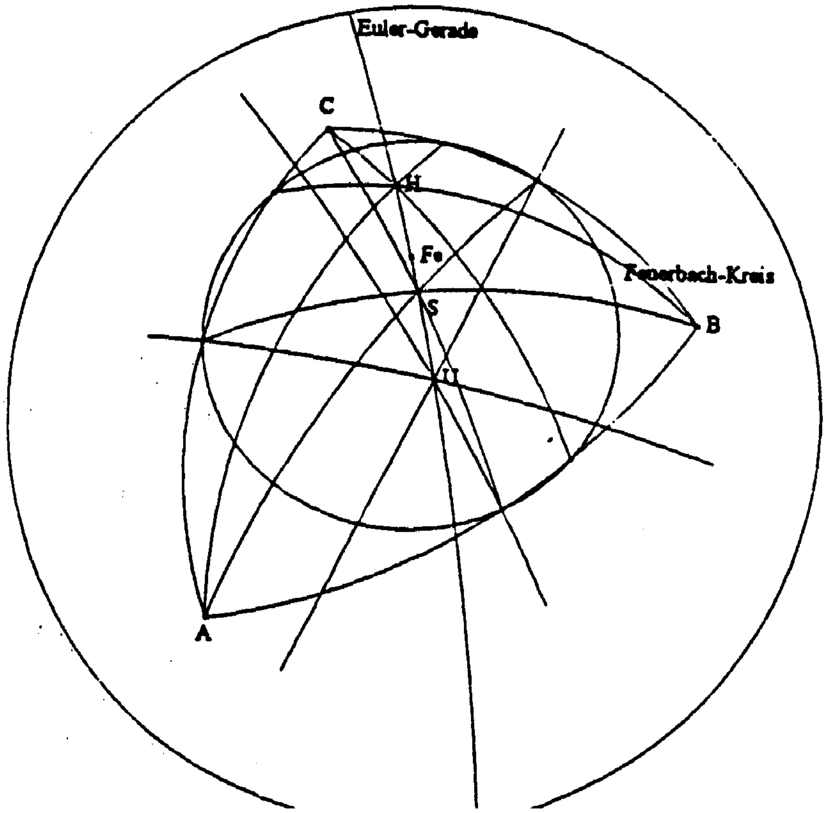


§ 9 Weitere illustrative Beispiele zu § 2–§ 6

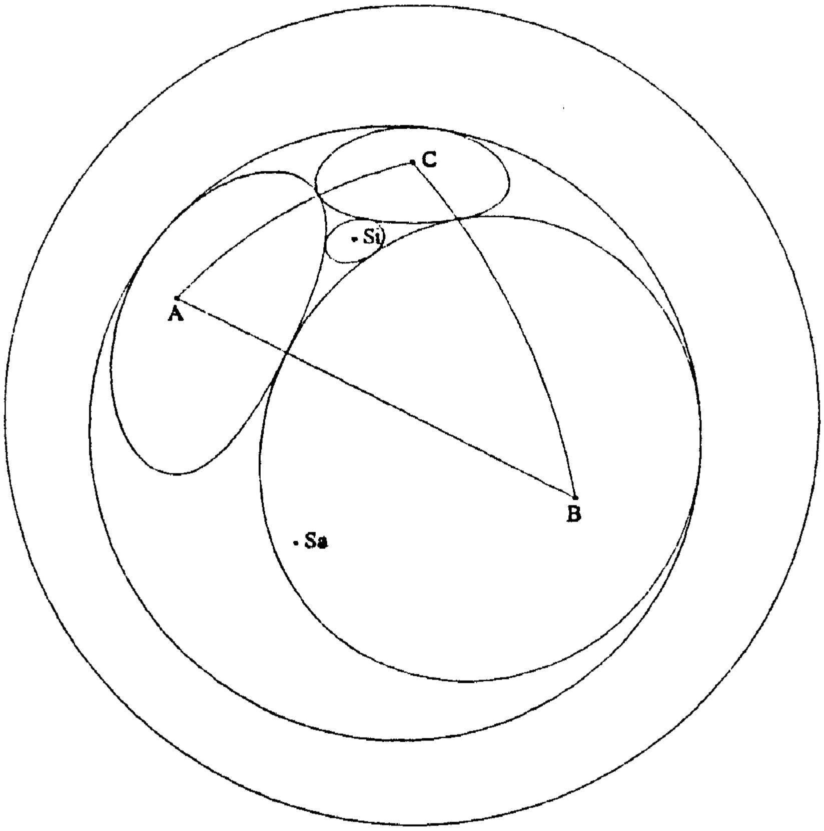
Inkreis, Ankreise, Gergonne'scher Punkt



Euler'sche Gerade, Feuerbachkreis



Soddy'sche Punkte und Kreise

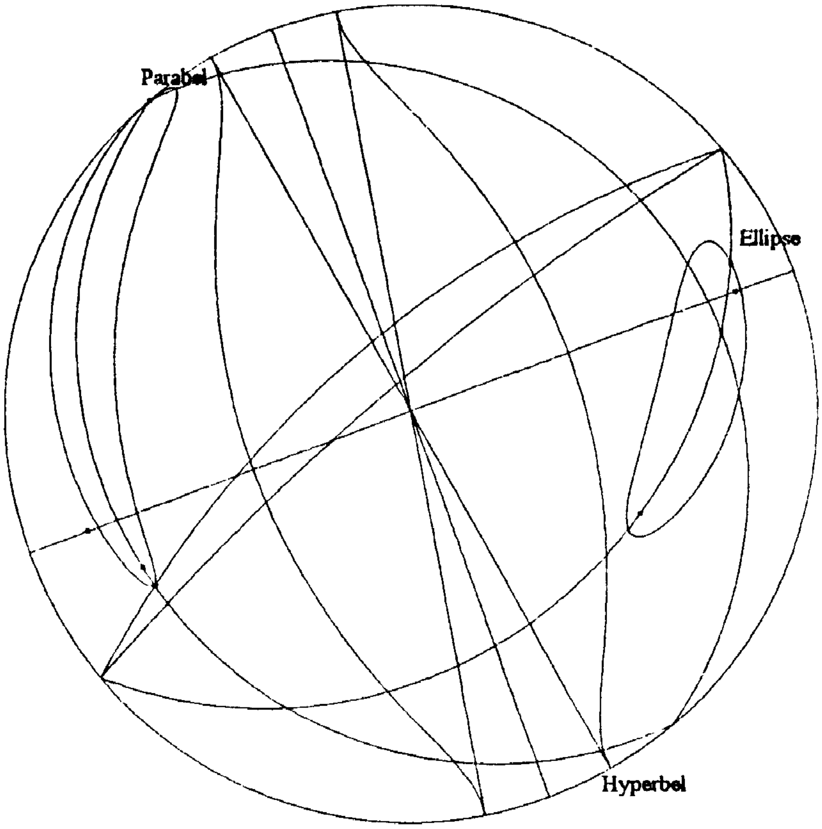


Parallele Gerade, Ellipse, Parabel, Hyperbel

Ellipse:
Mp=(4,1), φ=40°,
r=3, a=1, b=1/3

Hyperbel:
Mp=(0,0), φ=20°,
r=1, a=1, b=6

Parabel:
Mp=(-3,-2),
φ=−50°,
r=0, a=1, b=1



Bekannte Kurven in Polardarstellung

Strophoide:

$$r = -\cos 2t / \cos t$$

Zissoide:

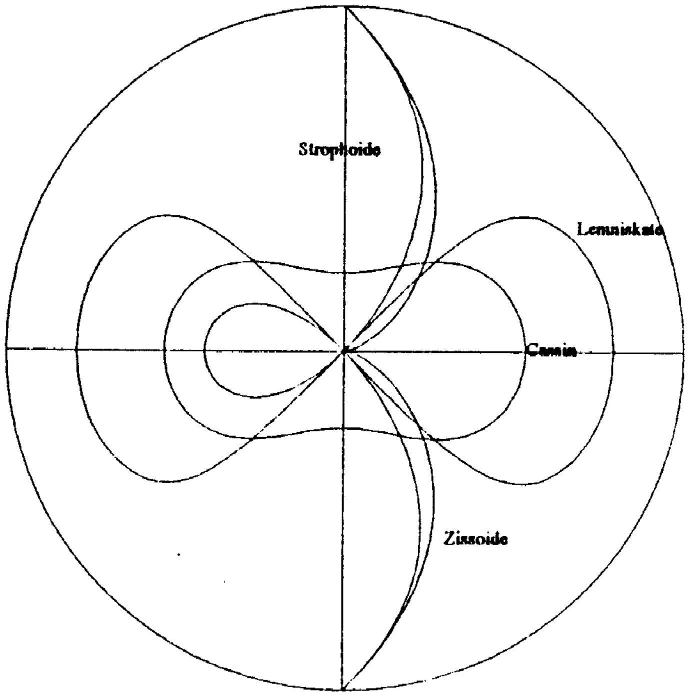
$$r = \sin^2 t / \cos t$$

Cassin:

$$r = \sqrt{\cos 2t + \sqrt{\cos^2 2t + 1/2}}$$

Lemniskate:

$$r = 3\sqrt{2\cos 2t}$$



Weitere bekannte Kurven

NikKonch:

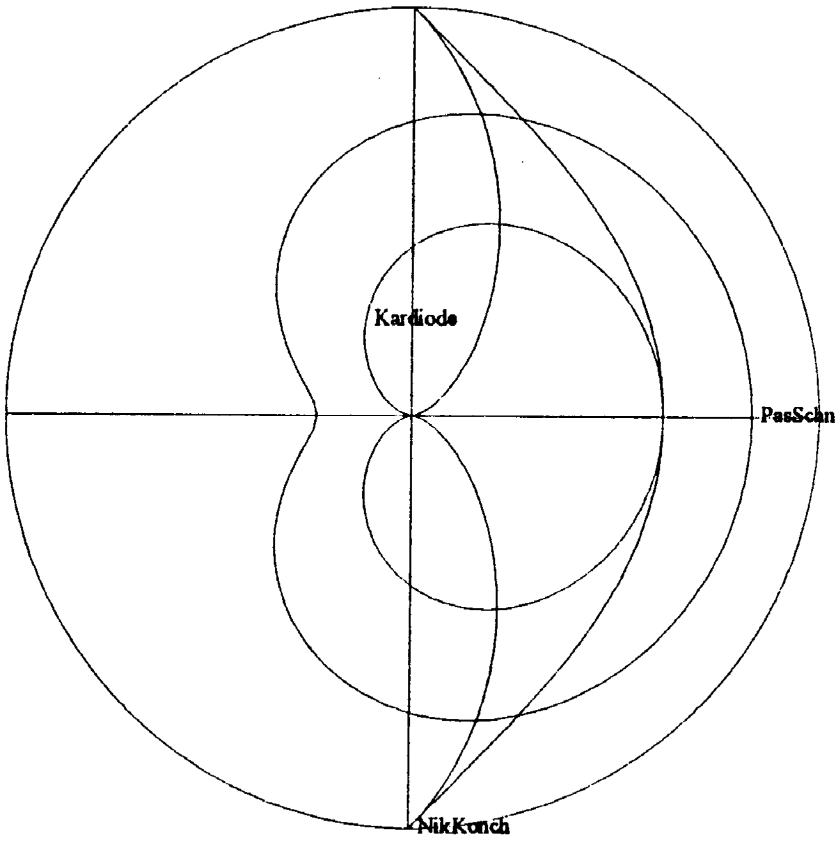
$$r = 1/\cos t \pm 1$$

PasSchn:

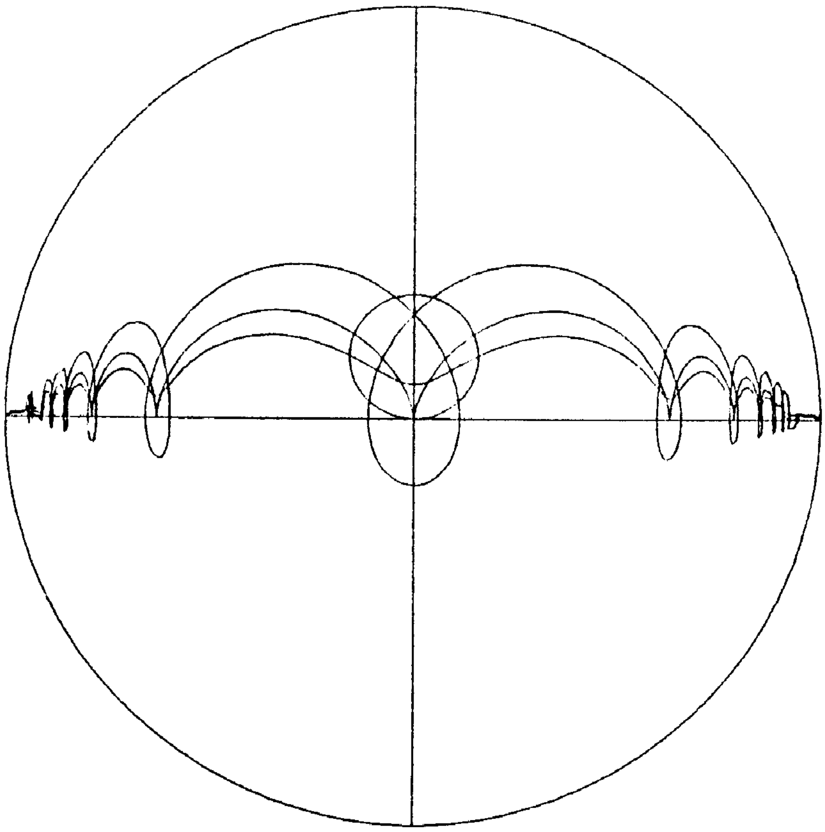
$$r = 5/2 \cos t + 3$$

Kardioide:

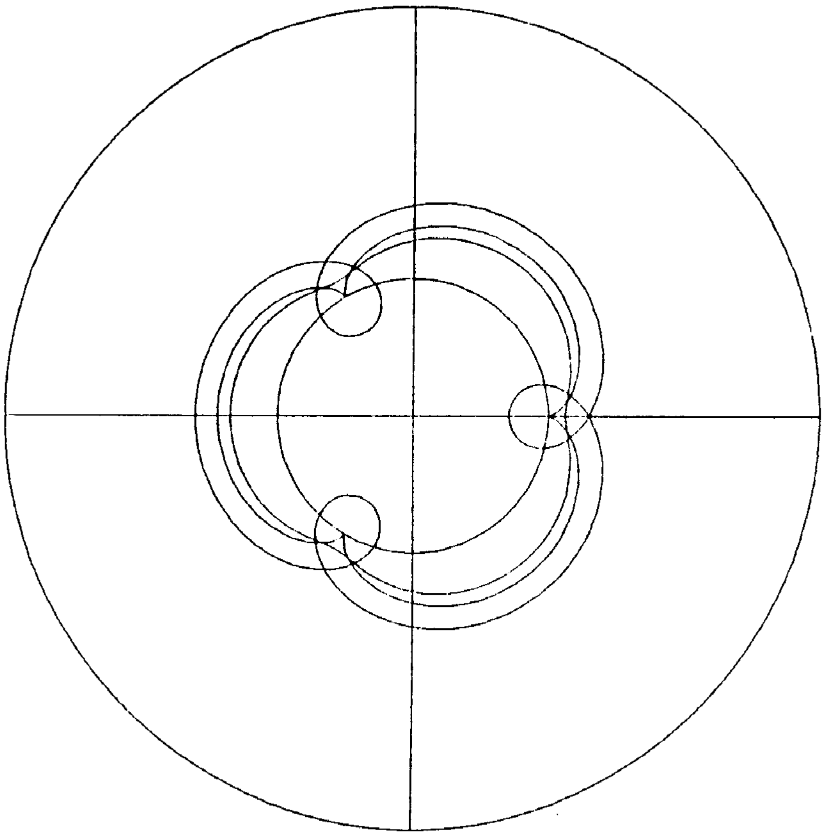
$$r = \cos t + 1$$



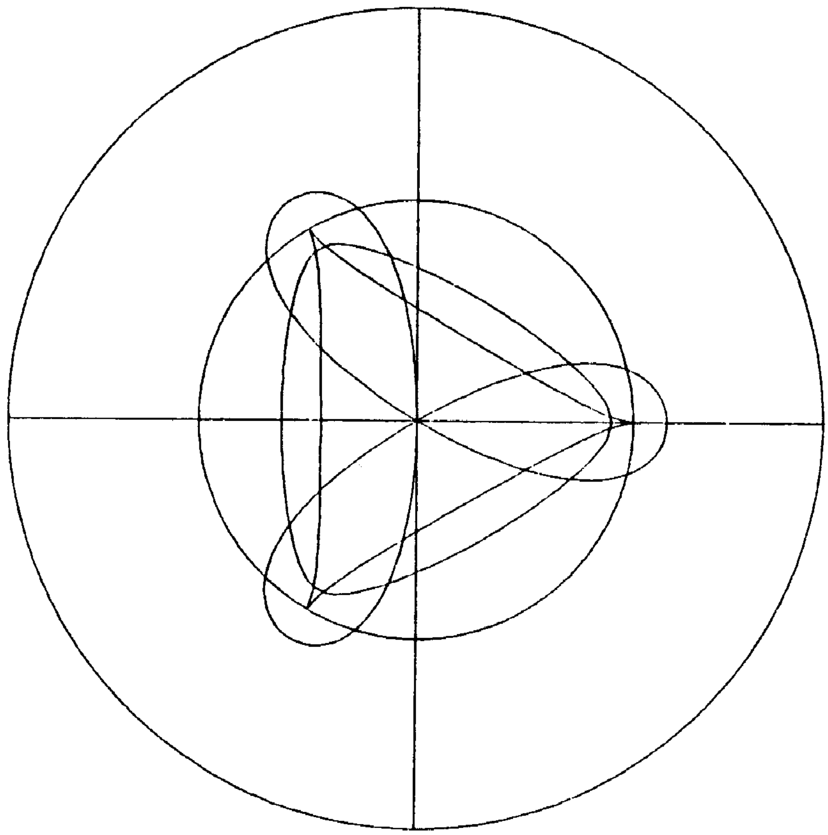
Verlängerte, gespitzte, verkürzte Zykloide



Epizykloiden



Hypozykloiden



Kurven mit interessantem Verhalten im Unendlichen

NeilParabel:

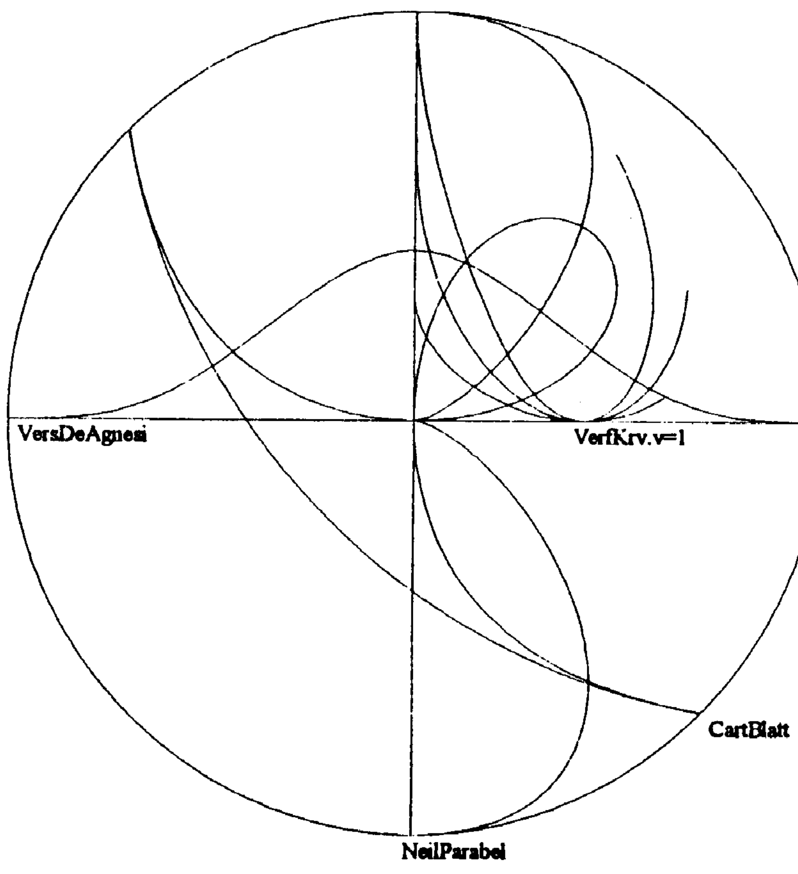
$$x = t^2$$
$$y = t^3$$

CartBlatt:

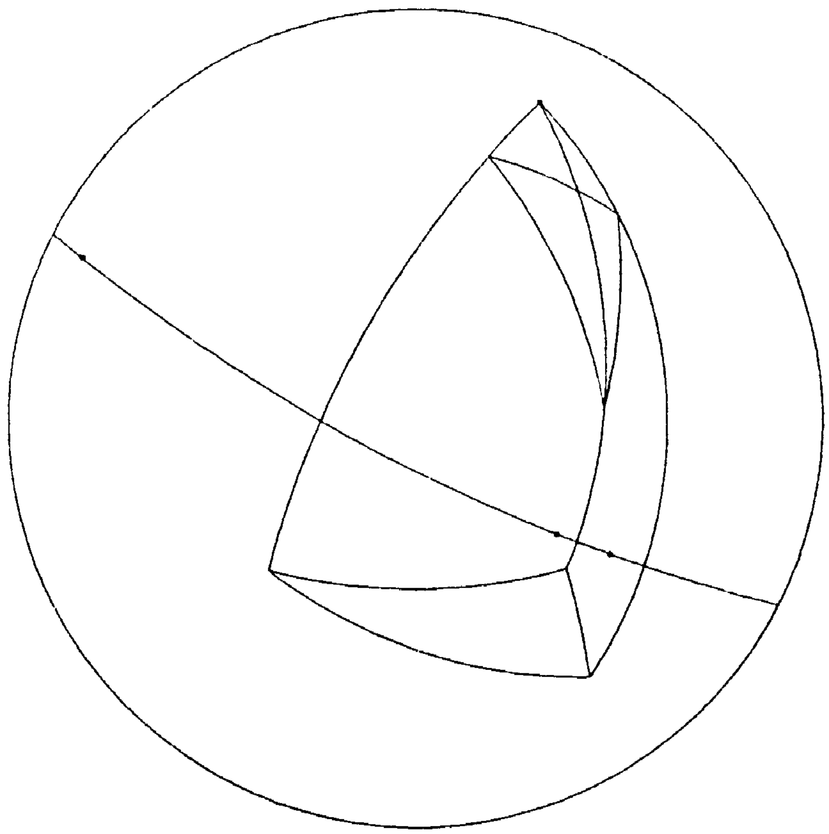
$$x = {}^{3t}\!/_{1+t^3}$$
$$y = {}^{3t^2}\!/_{1+t^3}$$

VersDeAgnesi:

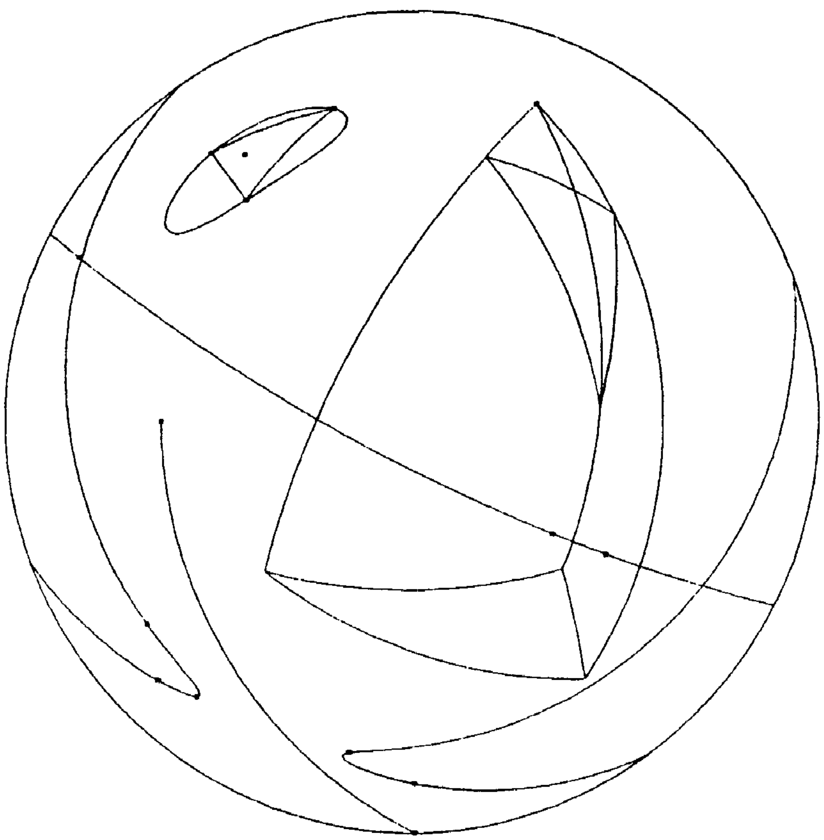
$$x = t$$
$$y = {}^{1}\!/_{1+t^2}$$



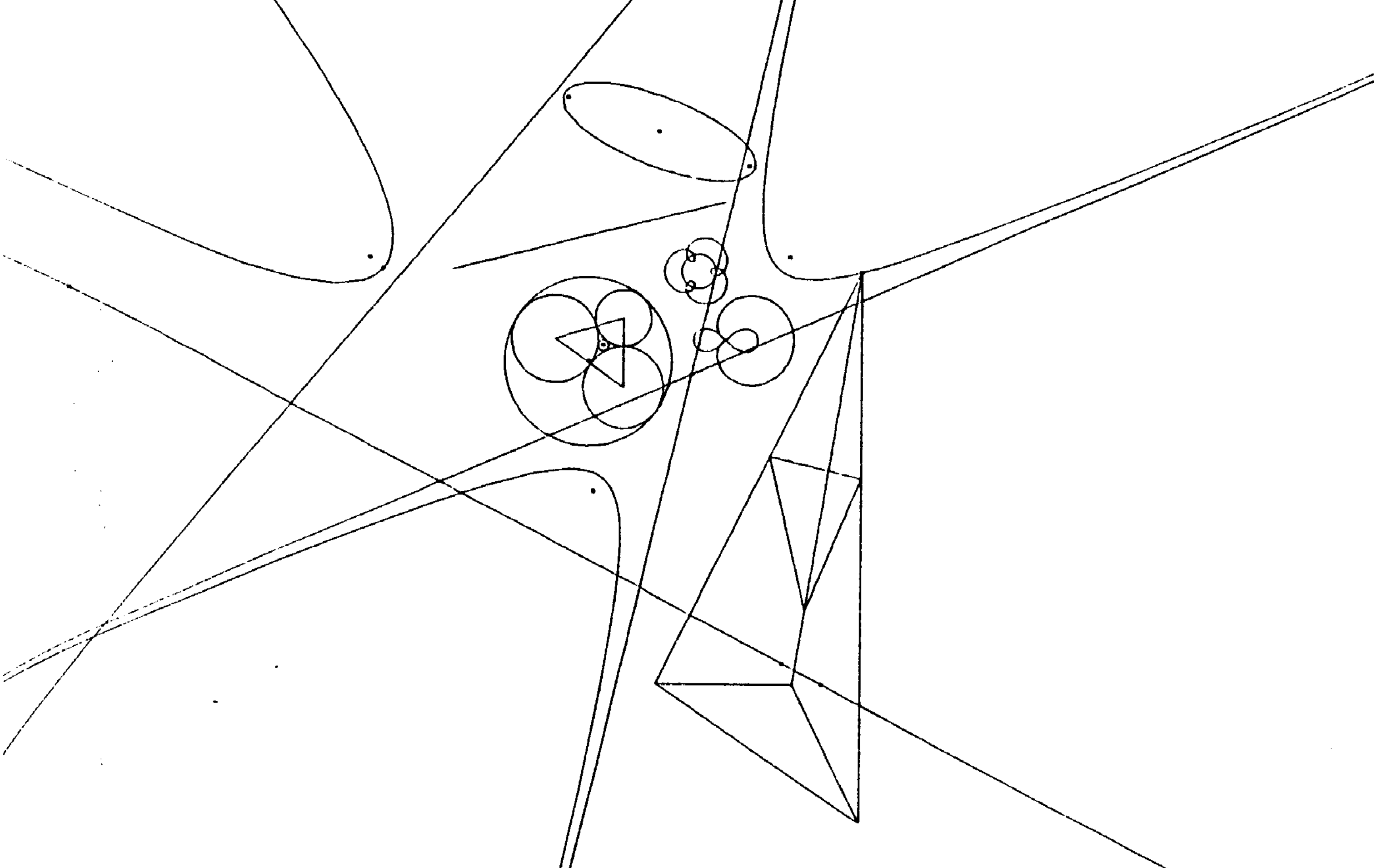
Der Satz von Desargues



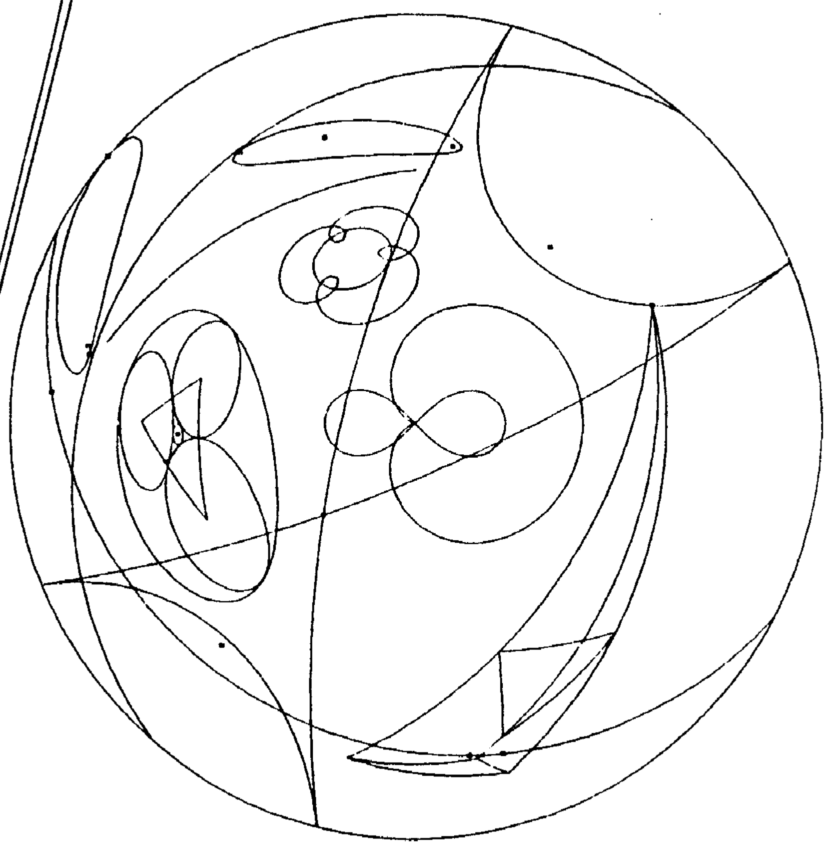
Die Sätze von Desargues und Pascal



Ein Mosaik in der affinen Ebene



Dasselbe Mosaik in der projektiven Ebene



Literaturliste

1. Coxeter, H. S. M., *Non-Euclidean Geometry*, 5^{th} Edition, Toronto, 1978.
2. Goursat E., *Mathematical Analysis.*
3. Grosser, S., Herfort W., *Ein explizites Modell der projektiven Ebene*, Math. Semesterberichte.
4. Grosser S., Herfort W., *An Invariance Property of Algebraic Curves in $P^2(\mathbb{R})$*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Serie II, TOMO XXXIII (1984), 134–144.
5. Grosser S., Rupprecht H., *Basic Mathematik–Programme*, Hölder–Pichler–Tempsky, Wien, 1985.
6. Hall M., *The Theory of Groups*, Mac Millan Company, New York, 1959.
7. Moise E., *Elementary Geometry from an Advanced Standpoint*, Addison–Wesley, New York, 1990.
8. Laub H., *Der Mathematik-Unterricht/Kurvendiskussion.*

O. Univ. Prof. Dr. Mag. Siegfried K. Grosser
Institut für Mathematik
der Universität Wien
Boltzmanngasse 9
1090 Wien